数理解析研究所講究録
29巻 1967年 1-12

複素多様体の変形について

京大数理解析研　中野 茂男
徳島大・工学部　江口 和男 記

§1. 問題の意義

微分多様体Xにどの程度複素構造を入れることが出来るかということについて考察する．即ちVを複素多様体，Mを微分多様体とするとき，各点$t \in M$に複素多様体V_tを対応させて，

(i) 各V_tは微分多様体としてはVの微分構造に同じ．

(ii) $t \to V_t$の対応はtに可微分的に従属する．

ように出来るかという問題である．

$\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ 即ち Riemann面の複素構造の変形については，Riemannにまで遡ることが出来る．然しながら2次元以上，複素多様体の変形については非常に困難であった．

1957年 A. Frölichen 及び A. Nijenhuis は，ⒽをV上の holomorphic vector-fields の germs の sheaf とするとき，$H^1(V, Ⓗ) = 0$ ならば，Vの変形は存在しないことを示した[17]．以下，これに続く結果として，K. Kodaira 及び D.C. Spencer による基本的な結果を紹介する．なお，§2については K. Kodaira 及び D.C. Spencer [34]（特に I, II），§3については K. Kodaira, D.C. Spencer [31]，及び K. Kodaira，

K. Kodaira, D.C. Spencer, L. Nirenberg [36]. §4 については K. Kodaira, D.C. Spencer [37] を参照されたい。

§2. Formulation

以下では，微分可能というときには C^∞ の意味であるとする．また考える多様体は全て *paracompact* であるとする．

M は連結な微分多様体，$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ は微分可能な M 上の *fibre bundle* で各 *fibre* $V_t = \varpi^{-1}(t)$，$t \in M$ は連結，*compact* な微分多様体 X に微分同型であるものとする．即ち写像 ϖ は次の性質を持つ．

(1) M の上への微分可能写像．

(2) proper 即ち K を M の任意の *compact* 集合とすれば，$\varpi^{-1}(K)$ は $\mathcal{V}$ の *compact* 集合である．

(3) ϖ の *Jacobian* は常に最大の *rank* を持つ．

この性質から，$t_0 \in M$ を任意の M の点とするとき，t_0 の近傍 U と

$$\begin{array}{ccc} \varpi^{-1}(U) & \xrightarrow{\ \phi\ } & U \times X \\ {\scriptstyle\varpi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{\ id.\ } & U \end{array}$$

微分同型 $\phi : \varpi^{-1}(U) \longrightarrow U \times X$ で左の図式を可換にするものがあることがいえる．但 *id* は恒等写像 $p : U \times X \longrightarrow U$ は $(t, x) \longrightarrow t$ で定義されるものとする．

定義1．微分可能な *fibre bundle* $\varpi : \mathcal{V} \longrightarrow M$ が複素多様

体の可微分変形族であるというのは以下の条件を満足することである。

(1) 各点 $t \in M$ 上の *fibre* $V_t = \varpi^{-1}(t)$ は複素多様体である。

(2) $\mathcal{V}$ の局所有限な開被覆 $\{\mathcal{U}_j\}$ と、各 $\mathcal{U}_j$ で定義された微分可能な複素数値函数 $z_j^1, \cdots, z_j^n$ 及び実数値函数 $t_j^1, \cdots, t_j^m$ があって、以下の条件を満足する。

(a) (t_j^λ) $\lambda = 1, \cdots, m$ は M 上の C^∞- 局所座標.

(b) $(\mathrm{Re}\, z_j^\alpha,\ \mathrm{Im}\, z_j^\beta,\ t_j^\lambda)$ $\alpha, \beta = 1, \cdots, n$, $\lambda = 1, \cdots, m$ は $\mathcal{V}$ 上の C^∞- 局所座標.

(c) $t \in M$ を固定すると、(z_j^α) は $V_t \cap \mathcal{U}_j$ で定義された、V_t の複素構造を定義する解析的局所座標.

定義2. $\varpi : \mathcal{V} \to M$, $\varpi' : \mathcal{V}' \to M'$ を二つの複素多様体の可微分族とするとき、

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\varpi"'] & \mathcal{V}' \arrow[d, "\varpi'"] \\ M \arrow[r, "\varphi"'] & M' \end{tikzcd}$$

を可換にする微分同型 Φ, φ があって、各点 $t \in M$ に対して、Φ の V_t 上への制限は V_t から $V'_{\varphi(t)} = \varpi'^{-1}(\varphi(t))$ の上への解析的同型であるとき、2つの族は同値であるという。

定義3. 複素多様体の可微分族 $\varpi : \mathcal{V} \to M$ はある $t_0 \in M$

に対し，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\Phi} & V_{t_0} \\ {\scriptstyle\varpi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varpi} \\ M & \xrightarrow{\mathrm{const.\ map}} & t_0 \end{array}$$

を可換にする C^∞-写像 $\Phi:\mathcal{V}\to V_{t_0}$ があって，Φ を各 V_t の上に制限すると V_t から V_{t_0} の上への解析的同型であるとき，自明な族であるといわれる．

定義4．$\mathcal{V}\xrightarrow{\varpi}M$ は複素多様体の可微分族，N は微分多様体 $f:N\to M$ は可微分写像とする．

N 上の複素多様体の可微分族 $\mathcal{W}\xrightarrow{\pi}N$ は，微分写像 $\Phi:\mathcal{W}\to\mathcal{V}$ があって，以下の条件を満足するとき，写像 f によって，$\mathcal{V}\xrightarrow{\varpi}M$ から誘導された族であるという．

条件(i)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{V} \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\varpi} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

は可換．

(ii) 各点 $s\in N$ に対し，Φ の $W_s=\pi^{-1}(s)$ 上への制限は W_s から $V_{f(s)}=\varpi^{-1}(f(s))$ の上への解析的同型である．

以上の定義で $\mathcal{V}$, M を複素解析多様体で，微分可能写像を正則な写像でおきかえると複素多様体の解析的変形族及びその同値，自明な族，誘導された族の概念が得られる．

$\mathcal{V}\xrightarrow{\varpi}M$ を与えられた複素多様体の可微分族，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{V}$ の

tangent bundle の sub bundle で $\mathcal{V}$ の各 fibre に沿う tangent vector のうち holomorphic なものからなるもの、また $\mathcal{E}$ は定義1の座標系による canonical basis $\frac{\partial}{\partial z_i^j}$, $\frac{\partial}{\partial t_i^j}$ の一次結合である $\mathcal{V}$ への tangent vector 全体からなる sub bundle とする. M 上の tangent bundle $T(M)$ の ϖ による逆像を $\varpi^* T(M)$ とすると, vector bundles の exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \varpi^* T(M) \longrightarrow 0$$

が得られる. これを可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ の vector bundles の fundamental sequence という.

$\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ の C^∞ cross-section で各 V_t 上に制限した時には V_t 上の holomorphic な cross-section を与えるものの germs の sheaf をそれぞれ Θ, Ψ で表わす. 明らかに自然な injection 及び準同型写像によって sheaf の exact sequence

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow \Psi \xrightarrow{j} \Psi/\Theta \longrightarrow 0$$

が得られる.

$T(M)$ の C^∞ cross-section の germs の sheaf を T_M, ϖ により T_M から導かれる $\mathcal{V}$ 上の sheaf を T とする $T = \varpi^* T_M$. すると T は Ψ/Θ の subsheaf とみなされ, $\Pi = j^{-1}(T)$ とおくことにより sheaves の exact sequence

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow \Pi \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

が得られる. この sheaves の exact sequence に対応する

cohomology exact sequence

$$0 \to H^0(\mathcal{V}, \Theta) \to H^0(\mathcal{V}, \Pi) \to H^0(\mathcal{V}, T) \to H^1(\mathcal{V}, \Theta) \to \cdots$$

において $H^0(\mathcal{V}, T)$ は $H^0(M, T_M) = T_M$ と ϖ によって誘導される写像によって同一視される。従って、上の *exact sequence* における $H^0(\mathcal{V}, T)$ を $H^0(M, T_M)$ で置き換えた時の $H^0(M, T_M)$ から $H^1(\mathcal{V}, \Theta)$ への写像を ρ で表わす。

定義1で述べた $\mathcal{V}$ の局所座標系 $\{\mathcal{U}_j, (z_j^\alpha, t_j^\lambda)\}$ に対し、

$$z_j^\alpha(p) = g_{jk}^\alpha(z_k(p), t) \qquad t = \varpi(p) \quad p \in \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \qquad \alpha = 1, \cdots, n$$

は z_k, t に関して C^∞、z_k に関して *holomorphic* である。

$H^0(\varpi(\mathcal{U}_j), T_M)$ の元 $v_j(t) = \sum v^\lambda(t) \frac{\partial}{\partial t^\lambda}$ が与えられたとき、写像 ρ は $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ 上の Θ に値を持つ 1-*cocycle*

$$\theta_{jk}(p) = \sum_{\alpha, \lambda} v^\lambda(t) \frac{\partial g_{jk}^\alpha(z_k(p), t)}{\partial t^\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$$

の代表する $H^1(\mathcal{V}, \Theta)$ の元を対応させるものである。

sheaves の *exact sequence*

$$0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow \Pi \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

を点 $t \in M$ 上の *fibre* $V_t = \varpi^{-1}(t)$ に制限して考えたもの

$$0 \longrightarrow \Theta_t \longrightarrow \Pi_t \longrightarrow T_t \longrightarrow 0$$

に対応する *cohomology* の *exact sequence* から

$$\rho_t : (T_M)_t \xrightarrow{\bullet} H^1(V_t, \Theta_t)$$

が得られる。これは $t \in M$ における *tangent vector*

$v = \sum_\lambda v^\lambda \frac{\partial}{\partial t^\lambda}$ に

$$\theta_{jk}(t) = \sum_{\alpha,\lambda} v^\lambda \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial t^\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$$

の属する cohomology class を対応させるものである。

この ρ-写像について次の諸定理が成立つ。

定理1. compact な複素多様体の可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ が locally trivial であるためには ρ が 0 写像であることが必要十分である。

定理2. $H^1(V_0, \Theta_0) = 0$ ならば V_0 を一つの member とする任意の compact 複素多様体の可微分族は 点 $0 \in M$ の近傍で locally trivial である。

定理3. 可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ は $\dim_{\mathbb{C}}(V_t, \Theta_t)$ が t に無関係に一定であるとき（この時 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ は regular であるといわれる）この $t \in M$ に対し $\rho_t = 0$ なることが、可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ が locally trivial であるために必要十分である。

§3. 変形の存在

V_0 を与えられた複素解析多様体 V_0 を C^∞ 可微分多様体とみなしたものを X で表わす。X 上の tangent bundle を $T(X)$ とすると V_0 の複素構造は直和分解 $T(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T(V) \oplus \overline{T(V)}$ を与える。Θ_0 を V 上の holomorphic vector fields の germs

の sheaf, Φ^q を $T(V)$ に値を持つ $(0, q)$ 型の differential forms の germs の sheaf とすれば外微分作用素 $\bar\partial$ と共に Θ_0 の fine resolution

$$0 \longrightarrow \Theta_0 \longrightarrow \Phi^0 \xrightarrow{\bar\partial} \Phi^1 \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \Phi^n \longrightarrow 0$$

がある。Φ^q の global sections の作る linear space $A^q = \Gamma(V_0, \Phi^q)$ は $\bar\partial$ と共に cochain complex $\sum_{q=0}^{n} A^q$ を作り、その cohomology group は Dolbeaul の定理によって、$H^q(V_0, \Theta_0)$ と同一視される。

一方 $\sum_{q=0}^{n} A^q$ は bracket を次のように定義することにより graded Lie algebra になる。即ち $\varphi = \sum_\alpha \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \in A^p$, $\psi = \sum_\beta \psi^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta} \in A^q$, $\varphi^\alpha = \frac{1}{p!} \sum \varphi^\alpha_{\bar\lambda_1 \cdots \bar\lambda_p} d\bar z^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z^{\lambda_p}$, $\psi^\beta = \frac{1}{q!} \sum \psi^\beta_{\bar\mu_1 \cdots \bar\mu_q} d\bar z^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z^{\mu_q}$ に対し

$$[\varphi, \psi] = \sum_\gamma [\varphi, \psi]^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma} \in A^{p+q}$$

$$[\varphi, \psi]^\gamma = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\varphi^\alpha \wedge \partial_\alpha \psi^\gamma + (-1)^{pq+1} \psi^\alpha \wedge \partial_\alpha \varphi^\gamma \right)$$

$$\partial_\alpha \psi^\gamma = \frac{1}{q!} \sum_\alpha \partial_\alpha \psi^\beta_{\bar\mu_1 \cdots \bar\mu_q} d\bar z^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge d\bar z^{\mu_q} \qquad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}.$$

この様に定義された bracket が graded Lie algebra の bracket の条件、即ち $\varphi \in A^p$, $\psi \in A^q$, $\tau \in A^r$ に対し、

$$[\varphi, \psi] = (-1)^{pq+1} [\psi, \varphi]$$

$$\bar\partial [\varphi, \psi] = [\bar\partial \varphi, \psi] + (-1)^p [\varphi, \bar\partial \psi]$$

$$(-1)^{pr} [\varphi, [\psi, \tau]] + (-1)^{qp} [\psi, [\tau, \varphi]] + (-1)^{rq} [\tau, [\varphi, \psi]] = 0$$

を満足していることは容易に確められる。

いま V' を V_0 に次の意味で"近い" X に入った複素構造とする．即ち $\{U_j\}$ を X の座標近傍系，U_j における V_0 の複素構造を定める局所座標を (z_j^α)，V' の複素構造を定める局所座標を (ζ_j^α) とするとき，

(i) $\quad \zeta_j^\alpha = f_j^\alpha(z, \bar{z})$ は微分可能函数．

(ii) $\quad \det\left(\dfrac{\partial f_j^\alpha}{\partial z_j^\beta}\right) \neq 0 \quad$ in U_j．

いま U_j 上の $T(V_0)$ に値を持つ $(0,1)$ 型の *differential form* φ_j を次のように定義する．

$$\varphi_j^\beta = \sum_{\gamma=1}^{n} \varphi_{j\bar{\gamma}}^\beta \, d\bar{z}^\gamma \quad , \quad \text{但 } \varphi_{j\bar{\gamma}}^\beta \text{ は方程式．}$$

$$(*) \quad \bar{\partial} \zeta_j^\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \varphi_j^\beta(z, \bar{z}) \, \partial_\beta \zeta_j^\alpha \quad \text{によって定められるものとする．}$$

$$\varphi_j = (\varphi_j^1, \cdots, \varphi_j^\beta, \cdots, \varphi_j^n).$$

$U_i \cap U_j$ における V' の座標変換を

$$\zeta_i^\beta = h_{ij}^\beta(\zeta_j^\alpha, \bar{\zeta}_j^\alpha)$$

とすると

$$\bar{\partial} \zeta_i^\beta = \sum_\mu \frac{\partial h_{ij}^\beta}{\partial \zeta_j^\mu} \cdot \bar{\partial} \zeta_j^\mu \qquad \partial_\gamma \zeta_i^\beta = \sum_\mu \frac{\partial h_{ij}^\beta}{\partial \zeta_j^\mu} \cdot \partial_\gamma \zeta_j^\mu$$

から $(*)$ を用いて，

$$\varphi_i^\beta(z, \bar{z}) = \varphi_j^\beta(z, \bar{z}) \quad \text{in } U_i \cap U_j$$

がいえる．従って，V_0 上 *global* な $T(V_0)$ に値を持つ

(0.1) 型の differential form φ が得られた。一方
$\bar\partial\bar\partial\zeta^\beta_j = 0$ から (*) の積分可能条件は

$$\bar\partial\varphi^\beta - \sum_{\gamma=1}^{n}\varphi^\gamma\wedge\partial_\gamma\varphi^\beta = 0 \qquad \beta = 1, \cdots, n$$

で与えられる。ここで $\wedge$ は forms の外積 $\partial_\gamma\varphi^\beta = \sum_{\nu=1}^{n}\partial_\gamma\varphi^\beta_{\bar\nu}\,d\bar z^\nu$ である。この積分可能條件はまた bracket を用いて書けば、

$$\bar\partial\varphi - [\varphi, \varphi] = 0$$

である。

逆に $\varphi \in A^1$ は V に近い概複素構造を定め $\bar\partial\varphi = [\varphi, \varphi]$ が満足されることが φ が複素構造を定めるための必要十分條件である。

V_0 が与えられ、$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ は V_0 を一つの member とする可微分族とするとき、各 V_t に対し、上のような $\varphi(t)$ が定まって、t に関して微分可能且つ初期條件 $\varphi(0) = 0$ を満す。逆に V_0 が与えられ $T(V_0)$ に値を持つ (0.1) 型の differential form の family $\{\varphi(t)\}_{t\in M}$ で $\varphi(0) = 0$、$\bar\partial\varphi(t) = [\varphi(t), \varphi(t)]$、$\varphi(t)$ は t について differentiable なるものがあるとき、V_0 を一つの member とする可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ で 各 V_t に $\varphi(t)$ が対応するものが存在する。いいかえると、与えられた複素構造に近い可微分族の存在はこのような $\{\varphi(t)\}$ の存在の問題に帰着することが出来る。

更に解析的変形族の存在については次の定理がある。

定理4. $H^2(V_0, \Theta_0) = 0$, $\dim_{\mathbb{C}} H^1(V_0, \Theta_0) = m$ ならば $\mathbb{C}^m$ における原点の近傍 M と解析的変形族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ で

(i) $\varpi^{-1}(0) = V_0$.

(ii) $\rho_0 : (T_M)_0 \to H^1(V_0, \Theta_0)$ は同型

(iii) $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ は $t = 0$ で *complex analytically complete*

である.

((iii) の意味は, $\mathcal{W} \xrightarrow{\varpi'} N$ を V_0 を *member* とする解析的変形族とするとき即 $0' \in N$ に対し $W_{0'} = \varpi'^{-1}(0') = V_0$ とするとき, N における $0'$ の近傍から M の点 0 の近傍への正則な写像 h があって, $h(0') = 0$, $\mathcal{W}$ は $W_{0'}$ の近傍では h によって $\mathcal{V}$ から誘導される. ということである.)

§4. *Parameter space* の複素構造

M が複素多様体 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ は複素解析的変形族の場合 M の *holomorphic coordinates* $(t^1, \cdots, t^m)$ を $(z_i^1, \cdots, z_i^n, t^1, \cdots, t^m)$ が $\mathcal{V}$ 上の *local holomorphic coordinates* になるようにとれるから当然 $\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\lambda}\right) = 0$ である.

regular な可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ の *parameter space* M の複素構造について次の諸定理が成立つ.

定理5. $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$: *regular* な *compact* 複素多様体の可微分族

各点 $t \in M$ に対し

(i) $\rho_t : (T_M)_t \to H^1(V_t, \Theta_t)$ は injective

(ii) ρ_t の像 $\rho_t((T_M)_t) \subset H^1(V_t, \Theta_t)$ は complex submodule

このとき, $\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\lambda}\right) = 0$ ($\lambda = 1, \cdots, m$, $m = \dim_{\mathbb{C}} M$) を満足するM上の複素解析構造が唯一つ存在する.

定理6. $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$: regular な compact 複素多様体の可微分族

M上の複素構造で各 $t \in M$ に対し $\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\lambda}\right) = 0$ $\lambda = 1, \cdots, m$ なるものがあれば, 任意の $t_0 \in M$ に対し, t_0 の近傍 U と $\mathcal{V}|U$, 即ち $\varpi^{-1}(U)$ 上の複素解析的変形族の構造で, 与えられた可微分族の構造及びMの複素構造に compatible なものが存在する.

注意 定理6の条件だけでは $\mathcal{V}$ 全体に複素解析的変形族の構造が入らない例があるが, $H^0(V_t, \Theta_t) = 0$ を仮定すれば全体に入る.